

Der Satz von HOLDITCH in der isotropen Ebene

Röschel, Otto

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 36, 1984,
S.27-32



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Der Satz von HOLDITCH in der isotropen Ebene

Von **Otto Röschel**, Leoben

vorgelegt von H. R. Müller

(Eingegangen am 6.4.1984)

Abstract. In this paper we show, that the classical theorem of HOLDITCH also holds in the isotropic plane. Then we give an interpretation for the only invariant M , which determines the area of the point – paths of a periodic motion in the isotropic plane.

Der klassische Satz von HOLDITCH aus dem Jahr 1858 (vergleiche [9]) war in letzter Zeit mehrfach Gegenstand bemerkenswerter Untersuchungen und Verallgemeinerungen (vergleiche [1], [6], [8] und [13]). Gleichzeitig wurde versucht, diesen Satz für Regelflächen auszusprechen (vergleiche [6], [7] und [10]) oder ihn in nicht-euklidische Ebenen zu übertragen (vergleiche [7] und [12], wo ein sphärisches Analogon bewiesen wird). Da nun auch die Kinematik der isotropen Ebene eingehend studiert wurde (vergleiche [14], [15], [20], [21] und [22]), soll hier versucht werden, eine Verallgemeinerung des Satzes von HOLDITCH für die isotrope Ebene zu beweisen.

1. Grundlagen

In der affinen Ebene $A_2(\mathbb{R})$ wird durch

$$\begin{cases} x(t) = a(t) + x_0 \\ y(t) = b(t) + x_0 \cdot c(t) + y_0 \end{cases} \quad (1)$$

($a(t), b(t), c(t) \in C^1$, $t \in (-\infty, +\infty)$) ein *Zwangslauf* Σ/Σ_0 im Sinne der ebenen isotropen Bewegungsgruppe B_3 bestimmt (vergleiche [14], [16] und [18]).

Werden nun dem klassischen Satz von HOLDITCH folgend die Endpunkte einer Strecke konstanter isotroper Länge ($\neq 0$) von einem isotropen Zwangslauf (1) auf einer Eilinie geführt, so muß es bei diesem Zwangslauf Augenblicke t_i ($i = 0, 1, \dots, n \in \mathbb{N}$) geben, in denen

$$a'(t_i) = 0^1) \quad (0 \leq i \leq n) \quad (2)$$

gilt. Zum Zeitpunkt t_i liegt dann momentan eine *isotrope Scherung* oder ein *Stillstand* von Σ in Σ_0 vor. Da in den bisherigen Betrachtungen isotroper Zwangsläufe solche Momente stets ausgeschlossen waren (vergleiche [14]), wollen wir uns kurz eine etwas bessere Kenntnis darüber verschaffen.

¹⁾ Ableitungen nach t werden wir durch Striche kennzeichnen.

2. Isotrope Zwangläufe mit momentaner isotroper Scherung

In (1) liege für $t = t_0$ die Situation von (2) vor. Die Punkte (x_0, y_0) von Σ besitzen dann Bahntangenten in Σ_0 , deren Richtungsvektoren durch

$$t(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ b'(t_0) + x_0 \cdot c'(t_0) \end{pmatrix} \quad (3)$$

beschrieben werden. Die Punkte von Σ durchlaufen *singuläre Punkte ihrer Bahnkurven*, wenn

$$b'(t_0) + x_0 \cdot c'(t_0) = 0 \quad (4)$$

erfüllt ist²⁾. Dies tritt genau dann für alle Punkte der Gangebene Σ ein, wenn ein augenblicklicher *Stillstand*

$$a'(t_0) = b'(t_0) = c'(t_0) = 0 \quad (5)$$

des isotropen Bewegungsvorganges vorliegt. Für $c'(t_0) \neq 0$ existiert in Σ eine isotrope Gerade

$$x_0 = -\frac{b'(t_0)}{c'(t_0)}, \quad (6)$$

deren Punkte der augenblicklichen *isotropen Scherungsachse* angehören, also für $t = t_0$ *Fixpunkte des Zwanglaufs* sind. Alle anderen Punkte von Σ besitzen nach (3) zum Zeitpunkt t_0 isotrope Bahntangenten.

Satz 1: *Liegt zum Zeitpunkt t_0 eines ebenen isotropen Zwanglaufs Σ/Σ_0 eine isotrope Scherung vor, so durchlaufen alle für t_0 in Σ_0 festen Punkte von Σ augenblicklich Spitzen ihrer Bahnkurven; alle anderen Punkte von Σ besitzen für t_0 isotrope Bahntangenten.*

3. Geschlossene isotrope Bewegungsvorgänge

Der isotrope Zwanglauf (1) heißt *geschlossen* (vergleiche [3, S. 260] bzw. [11, S. 206]), wenn es ein $T \in \mathbb{R}^+$ gibt, so daß für alle $t \in (-\infty, +\infty)$

$$a(t+T) = a(t), \quad b(t+T) = b(t) \quad \text{und} \quad c(t+T) = c(t) \quad (7)$$

gilt. Dabei sei noch vorausgesetzt, daß T die kleinste derartige Zahl ist. Alle Bahnkurven eines solchen geschlossenen isotropen Bewegungsvorganges sind geschlossene Kurven.

Wir definieren

$$F(k) := \frac{1}{2} \cdot \int_k x \cdot dy - y \cdot dx \quad (8)$$

als *Flächenmaß einer geschlossenen C^1 -Kurve k der isotropen Ebene* und beweisen den folgenden

²⁾ Es handelt sich bei diesen Singularitäten im allgemeinen um Spitzen der Bahnkurven.

Satz 2: Das Flächenmaß einer geschlossenen C^1 -Kurve k der isotropen Ebene ist eine Invariante der ebenen isotropen Bewegungsgruppe B_3 .

Beweis: Sei k eine geschlossene C^1 -Kurve $(x(t), y(t))$ der isotropen Ebene mit der Periode $T \in \mathbb{R}^+$ ($t \in (-\infty, +\infty)$) und \bar{k}

$$\begin{cases} \bar{x}(t) = x(t) + a \\ \bar{y}(t) = y(t) + b + c \cdot x(t) \end{cases} \quad (9)$$

die durch eine ebene isotope Bewegung (a, b, c konstant $\in \mathbb{R}$) aus k hervorgehende Kurve, so finden wir

$$\begin{aligned} 2 \cdot F(\bar{k}) &= \int_{\bar{k}} \bar{x} d\bar{y} - \bar{y} d\bar{x} = (a \cdot y(t) + x(t) \cdot (a \cdot c - b)) \Big|_0^T + \\ &+ 2 \cdot F(k) = 2 \cdot F(k). \quad \square \end{aligned} \quad (10)$$

Für die Bahnkurven $p_0(x_0, y_0)$ der Punkte (x_0, y_0) der Gangebene Σ bei einem geschlossenen isotropen Bewegungsvorgang Σ/Σ_0 mit der Periode T erhalten wir das Flächenmaß

$$\begin{aligned} 2 \cdot F(p_0(x_0, y_0)) &= \int_0^T (a(t) \cdot b'(t) - a'(t) \cdot b(t)) dt + \\ &+ x_0 \cdot \int_0^T (a(t) \cdot c'(t) - a'(t) \cdot c(t)) dt, \end{aligned} \quad (11)$$

woraus mit

$$M := \frac{1}{2} \cdot \int_0^T (a(t) \cdot c'(t) - a'(t) \cdot c(t)) dt \quad (12)$$

für die Flächenmaße $F(p_0(x_0, y_0))$ und $F(p_0(x_1, y_1))$ der Bahnkurven zweier nicht-paralleler Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) von Σ

$$F(p_0(x_0, y_0)) - F(p_0(x_1, y_1)) = M \cdot (x_0 - x_1) \quad (13)$$

folgt. Damit gilt das folgende *isotrope Analogon zum Satz von Holditch*:

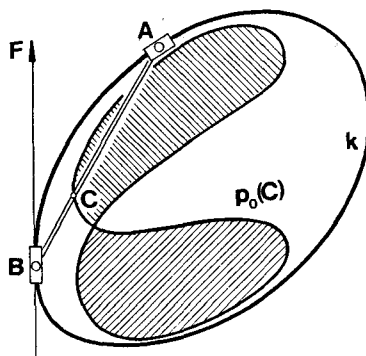
Satz 3: Die Differenz der Flächenmaße der geschlossenen Bahnkurven je zweier Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) der Gangebene Σ ist für einen geschlossenen ebenen isotropen Bewegungsvorgang Σ/Σ_0 nur von der Zwanglaufkonstanten M und dem isotropen Abstand der Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) abhängig.

Damit ist auch ein Analogon zu den STEINER'schen Sätzen für geschlossene ebene euklidische Zwangsläufe gefunden (vergleiche [17, S. 99 ff.]): Punkte von Σ , die bei einem geschlossenen ebenen isotropen Zwangslauf Bahnkurven mit demselben Flächenmaß besitzen, liegen nach (13) für $M \neq 0$ auf einer *isotropen Geraden*. Für $M = 0$ stimmen die Flächenmaße aller Bahnkurven überein. Dies ist genau für

$$a(t) = K \cdot c(t) \quad (K = \text{konst.} \in \mathbb{R}) \quad \forall t \in (-\infty, +\infty) \quad (14)$$

der Fall.

Betrachten wir nun das isotope Analogon zum *klassischen Satz von HOLDITCH genauer* (Abbildung 1):



Die nichtparallelen Punkte A und B werden auf einer Eilinie k geführt, überstreichen aber nicht ganz k . Der zugehörige isotope Zwangslauf Σ/Σ_0 ist geschlossen; die von den Bahnkurven von A und B (Teile von k) umschlossenen Gebiete besitzen verschwindendes Flächenmaß. Es gilt also $M = 0$; damit verschwindet das Flächenmaß aller Punktbahnen dieses isotropen Zwangslaufs. In der Abbildung 1 ist das für die Punktbahn $p_0(C)$ so zu verstehen, daß die verschieden schraffierten Gebiete in entgegengesetzter Richtung umlaufen werden. Da sie gleichen Flächeninhalt besitzen, gilt $F(p_0(C)) = 0$.³⁾

4. Deutung von M im kinematischen Bild des isotropen Zwangslaufs

Wir betrachten die *kinematische Abbildung*

$$\begin{aligned} K: \quad \mathbb{B}_3 &\longrightarrow \mathbb{P}_3 \\ (a(t), b(t), c(t)) &\longrightarrow (1: a(t): \frac{c(t)}{2}: b(t) - \frac{a(t)c(t)}{2}), \end{aligned} \quad (15)$$

der ebenen isotropen Bewegung (1) (vergleiche [19, S. 205 f.]). Dem geschlossenen isotropen Bewegungsvorgang (1) mit (7) entspricht dabei eine *geschlossene Bildkurve* k^* . Die Zusammensetzung der ebenen isotropen Bewegungen induziert im dreidimensionalen projektiven Bildraum \mathbb{P}_3 eine fünfparametrische Gruppe G_5 projektiver Kollineationen (vergleiche [19, S. 205 f.]), die in die sechsgliedrigen Gruppen $\mathfrak{B}_6^{(1)}$ der *allgemeinen isotropen Bewegungen des einfach isotropen Raumes* $I_3^{(1)}$ und $\mathfrak{B}_6^{(2)}$ der *isotropen Bewegungen des zweifach isotropen Raumes* $I_3^{(2)}$ eingebettet ist. Wird k^* aus dem *absoluten Punkt* $F(0:0:0:1)^t$ dieser Räume in die nichtisotrope Ebene $x_3 = 0$ projiziert, so besitzt die entstehende ebene Bildkurve $k^{*'}$ unter Verwendung der üblichen affinen Koordinaten

³⁾ In Abbildung 1 liegt A auf der momentanen isotropen Scherungsachse und durchläuft daher augenblicklich eine Spitze seiner Bahnkurve.

$$1:x:y:z = x_0:x_1:x_2:x_3 \quad (x_0 \neq 0) \quad (16)$$

das Flächenmaß⁴⁾

$$\begin{aligned} F(k^*) &:= F(k^{*'}) = \frac{1}{2} \cdot \int_{k^{*'}} x dy - y dx = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \int_0^T (a(t) \cdot c'(t) - a'(t) \cdot c(t)) dt = \frac{M}{2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Damit gilt der

Satz 4: Die Zwangslaufkonstante M eines geschlossenen ebenen isotropen Zwangslaufs Σ/Σ_0 läßt sich als doppeltes Flächenmaß der dem Zwangslauf in der isotropen kinematischen Abbildung zugeordneten Bildkurve k^* deuten.

Literatur

- [1] BENDER, W.: The Holditch Curve Tracer. Math. Mag. **54**, 3, 128–129 (1981).
- [2] BLASCHKE, W. und MÜLLER, H. R.: Ebene Kinematik. Oldenbourg 1956.
- [3] BOTTEMA, O. und ROTH, B.: Theoretical kinematics. North-Holland, Amsterdam 1979.
- [4] BROMAN, A.: Holditch's theorem is somewhat deeper than Holditch thought in 1858. Normat. 89–100 (1979).
- [5] BROMAN, A.: Holditch's Theorem. Math. Mag. **54**, 3, 99–108 (1981).
- [6] HENTSCHEKE, S.: Erweiterungen des Satzes von Holditch. Sber. Österr. Akad. Wiss. Wien, Kl. II, **184**, 451–458 (1975).
- [7] HERING, L.: Holditch-Sätze für Regelflächen bzw. sphärische Kurven. Journal of Geom. **20**, 86–94 (1983).
- [8] HERING, L.: Sätze vom Holditch-Typ für ebene Kurven. Elem. Math. **38**, 39–49 (1983).
- [9] HOLDITCH, H.: Lady's and gentleman's diary for the year 1858.
- [10] HOSCHEK, J.: Eine Verallgemeinerung des Satzes von Holditch. Monatsh. Math. **80**, 93–99 (1975).
- [11] MÜLLER, H. R.: Über geschlossene Bewegungsvorgänge. Monatsh. Math. **55**, 206–214 (1951).
- [12] MÜLLER, H. R.: Sphärische Kinematik. Berlin 1962.
- [13] MÜLLER, H. R.: Zum Satz von Holditch. Aus: TÖLKE-WILLS: Contribution to Geometry. Basel 1979.
- [14] RÖSCHEL, O.: Zur Kinematik der isotropen Ebene. Journal of Geom. (im Druck).
- [15] RÖSCHEL, O.: Zur Kinematik der isotropen Ebene II. (In Vorbereitung).
- [16] SACHS, H.: Lehrbuch der isotropen Geometrie. Vieweg, Wiesbaden 1984.
- [17] STEINER, J.: Gesammelte Werke, Bd. II. Berlin 1882/83.
- [18] STRUBECKER, K.: Geometrie in einer isotropen Ebene. Math. Nat. Unterr. **15**, 207–306, 343–351, 385–394 (1962/63).
- [19] STRUBECKER, K.: Geometrie und Kinematik des elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raumes. Wege der Forschung, Bd. 177. Wissenschaftl. Buchges., Darmstadt 1972.

⁴⁾ Durch Rechnung bestätigt man unschwer, daß dieses Flächenmaß einer geschlossenen C^1 -Raumkurve des $I_3^{(1)}$ oder des $I_3^{(2)}$ sowohl eine $\mathfrak{B}_6^{(1)}$ - als auch eine $\mathfrak{B}_6^{(2)}$ -Invariante ist.

- [20] TÖLKE, J.: Eine kennzeichnende Eigenschaft der isotropen Bewegungen. Anz. Österr. Akad. Wiss. **7**, 165–168 (1978).
- [21] TÖLKE, J.: Isotrope Kegelschnittsbewegungen. Journal of Geom. **13**, 31–48 (1979).
- [22] TÖLKE, J.: Zu den affinen Zwangsläufen, bei denen sich die Punkte eines Kegelschnitts auf Geraden bewegen. Studia Sci. Math. Hung. **15**, 151–156 (1980).